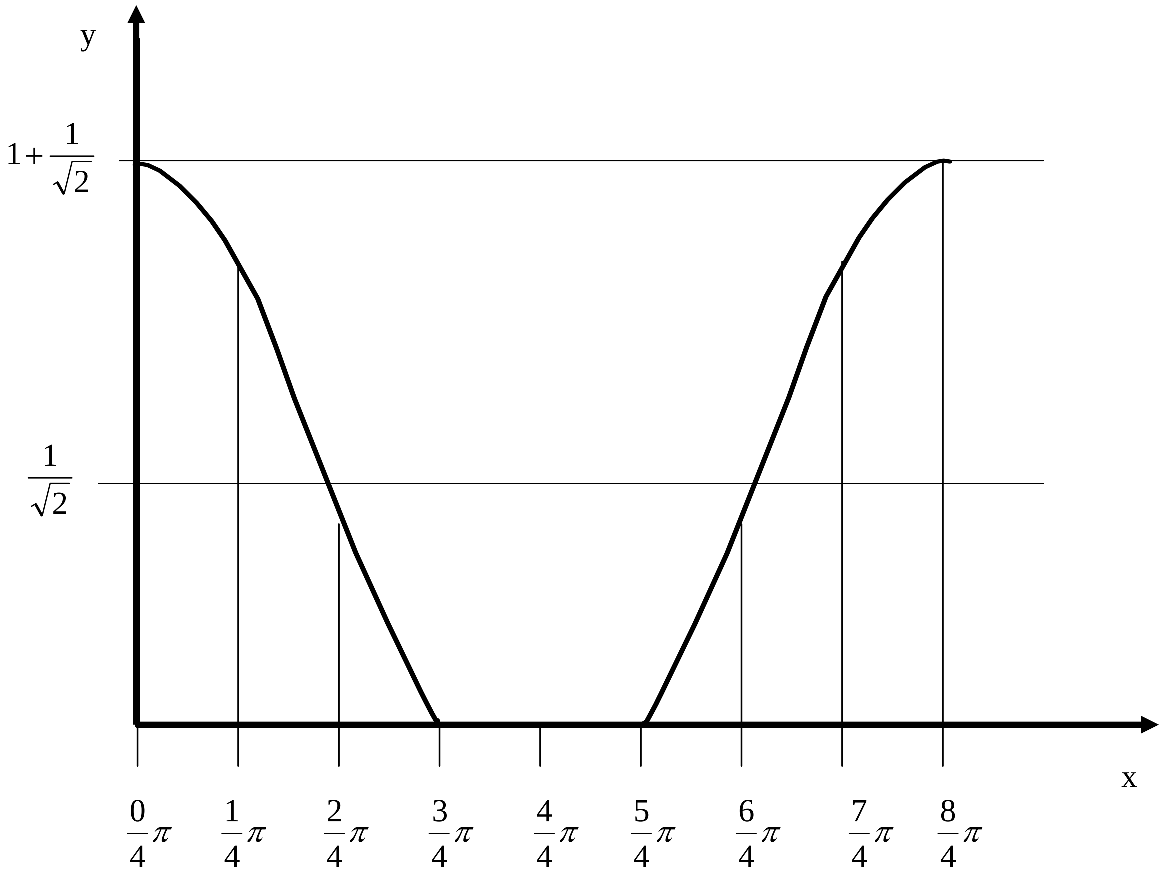
Die Berechnung der ersten vier Fourierkoeffizienten für einen AB Betriebsfall

Fourier hat aufgezeigt, dass eine periodische Funktion in eine unendliche trigonometrische Reihe entwickelt werden kann:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

Da die trigonometrische Reihe periodisch in 2π ist können auch nur Funktionen die ihrerseits in 2π periodisch sind in solch eine Reihe entwickelt werden. Für einen Stromflusswinkel Θ von 135° sollen beispielhaft die ersten 4 Fourierkoeffizienten berechnet werden um die spektrale Zusammensetzung des Stromes zu analysieren. Die ermittelten Ergebnisse sollen im Anschluss daran mit Hilfe des Stromflusswinkeldiagramms überprüft werden.

Der Einfachheit halber wird in der folgenden Rechnung anstelle I=f(t) y=f(x) verwendet. Wie in der Einführung zum Leistungsverstärker dargelegt, fließt der Strom während der 2π-Periode genau 2Θ. Bei Θ=135° fließt also während 270°, was $3\pi/2$ entspricht Strom. Das bedeutet wiederum, dass der Strom in einem Abschnitt von $\pi/2$ nicht fließt. Konstruiert man zu diesem Stromverlauf im mittleren AB-Bereich die zugehörige mathematische Funktion, kann man sich eine cos-Funktion mit einem aufaddierten zusätzlichen Gleichanteil vorstellen. Die cos-Funktion variiert in einem Wertebereich zwischen +1 und –1. Bei 135° soll der Wert der Stromfunktion die 0 erreichen. Da die cos-Funktion an dieser Stelle den Wert $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ aufweist muss der zusätzliche Gleichanteil $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ betragen um das zu erfüllen. Dieser Wert entspricht dem Ruhestrom unseres Beispieles. Der Ruhestrom der Leistungsverstärkerstufe ist der Strom, der ohne angelegtes HF-Eingangssignal am Ausgang fließt. Die zusammengesetzte Stromfunktion sieht dann folgendermaßen aus:



Da cos-Funktion und Gleichanteil beides gerade Funktionen sind liegt eine Symmetrie erster Art vor. Das bedeutet, dass alle b_n der unendlichen Fourierreihe gleich 0 sind. Anders ausgedrückt: Es werden keine Sinus-Komponenten benötigt um den abgebildeten Stromverlauf nachzubilden. Es gelingt allein mit cos-Komponenten. Daher müssen im Folgenden nur a_0 bis a_3 berechnet werden.

Die Berechnung von a_0

Die allgemeine Definition lautet: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx$

Das Integral stellt die Fläche unter der Stromverlaufsfunktion dar. Unsere Beispielfunktion muss in 3 Abschnitten integriert werden:

Der erste Abschnitt geht von $\frac{0}{4}\pi$ bis $\frac{3}{4}\pi$ und integriert den ersten Flächenbeitrag. Er sei mit A_{10} bezeichnet:

$$A_{10} = \int_0^{\frac{3}{4}\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\cdot x\right)dx = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3\pi+4}{4\sqrt{2}} = \underline{2{,}37}$$

Durch Überlegung kommt man zu der Erkenntnis, das der zweite hintere Flächenabschnitt gleichgroß ist. Dieser Abschnitt geht von $\frac{5}{4}\pi$ bis $\frac{8}{4}\pi$. Der Abschnitt von $\frac{3}{4}\pi$ bis $\frac{5}{4}\pi$ liefert keinen Flächenbeitrag. Für den Fourierkoeffizienten a_0 erhält man dann: $a_o = \frac{2A_{10}}{2\pi} = \underline{0.755}$

Da unser maximaler y-Wert im Beispiel $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ beträgt, ist auch der a_0 auf diesen Wert bezogen. Üblich ist eine Normierung auf einen maximalen Strom von 1. Daher muss durch $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ dividiert werden:

$$a_{0n} = \frac{0.755}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{0.755}{1.707} = \underline{\underline{0.4425}}$$

Für ein Θ von 135° findet man diesen Wert für den Gleichanteil im Stromflusswinkeldiagramm.

Die Berechnung von a_1

Die allgemeine Definition lautet: $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx$$

Für n=1 erhält man: $$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cdot\cos(x)dx$$

Die Integration über die Periode von 2π erfolgt wieder in 3 Teilabschnitten.

Der erste Abschnitt geht wieder von $\frac{0}{4}\pi$ bis $\frac{3}{4}\pi$ und liefert den ersten Teilbeitrag. Er sei mit A_{11} bezeichnet:

$$A_{11} = \int_0^{\frac{3}{4}\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(x)\right)\cdot\cos(x)dx = \int_0^{\frac{3}{4}\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \cos^2(x)\right)dx = \int_0^{\frac{3}{4}\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\right)dx$$

$$A_{11} = \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\sin(2x)\right)\Bigg|_{\frac{0}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} = \underline{1.428}$$

Der Abschnitt von $\frac{3}{4}\pi$ bis $\frac{5}{4}\pi$ liefert keinen Beitrag zum Integral, da hier der Wert der Funktion gleich 0 ist.

Der Abschnitt von $\frac{5}{4}\pi$ bis $\frac{8}{4}\pi$ liefert einen Teilbeitrag. Er sei mit A_{12} bezeichnet. Das Integral ist das gleiche geblieben, nur die Integrationsgrenzen haben sich verändert:

$$A_{12} = \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\sin(2x)\right)\Bigg|_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{8}{4}\pi} = \pi - 1.7135 = \underline{1.428} = A_{11}$$

Für den Fourierkoeffizienten a_1 erhält man dann: $$a_1 = \frac{2A_{11}}{\pi} = \underline{0.909}$$

Jetzt muss wieder auf einen Spitzenstrom von 1 normiert werden und man erhält schließlich:

$$a_{1n} = \frac{0.909}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{0.909}{1.707} = \underline{\underline{0.532}}$$

Für ein Θ von 135° findet man diesen Wert für den Grundwellenanteil im Stromflusswinkeldiagramm.

Die Berechnung von a_2

Für n=2 erhält man: $a_2 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cdot \cos(2x) dx$

Der erste Abschnitt geht wieder von $\frac{0}{4}\pi$ bis $\frac{3}{4}\pi$ und liefert den ersten Teilbeitrag. Er sei mit A_{21} bezeichnet:

$$A_{21} = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(x)) \cdot \cos(2x) dx = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2x) + \cos(x) \cdot \cos(2x)) dx$$

$$A_{21} = (\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}} + \frac{\sin(x)}{2} + \frac{1}{6} \cdot \sin(3x)) \Big|_{\frac{0}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} = \underline{0.11785}$$

Beim zweiten relevanten Beitrag bleibt das Integral wieder erhalten und es ändern sich nur die Integrationsgrenzen:

$$A_{22} = (\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}} + \frac{\sin(x)}{2} + \frac{1}{6} \cdot \sin(3x)) \Big|_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{8}{4}\pi} = 0 - (-0.11785) = \underline{0.11785} = A_{21}$$

Für den Fourierkoeffizienten a_2 erhält man dann: $a_2 = \frac{2A_{21}}{\pi} = \underline{0.0750}$

Jetzt muss wieder auf einen Spitzenstrom von 1 normiert werden und man erhält schließlich:

$$a_{2n} = \frac{0.0750}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{0.0750}{1.707} = \underline{\underline{0.0439}}$$

Für ein Θ von 135° findet man diesen Wert für den Anteil der ersten Harmonischen im Stromflusswinkeldiagramm.

Die Berechnung von a_3

Für n=3 erhält man: $a_3 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cdot \cos(3x) dx$

Der erste Abschnitt geht wieder von $\frac{0}{4}\pi$ bis $\frac{3}{4}\pi$ und liefert den ersten Teilbeitrag. Er sei mit A_{31} bezeichnet:

$$A_{31} = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(x)) \cdot \cos(3x) dx = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(3x) + \cos(x) \cdot \cos(3x)) dx$$

$$A_{31} = \left(\frac{\sin(3x)}{3\sqrt{2}} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{8} \cdot \sin(4x)\right)\Bigg|_{\frac{0}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} = \underline{-0.0833}$$

Beim zweiten relevanten Beitrag bleibt das Integral wieder erhalten und es ändern sich nur die Integrationsgrenzen:

$$A_{32} = \left(\frac{\sin(3x)}{3\sqrt{2}} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{8} \cdot \sin(4x)\right)\Bigg|_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{8}{4}\pi} = 0 - 0.0833 = \underline{-0.0833} = A_{31}$$

Für den Fourierkoeffizienten a_3 erhält man dann: $a_3 = \frac{2A_{31}}{\pi} = \underline{-0.05305}$

Jetzt muss wieder auf einen Spitzenstrom von 1 normiert werden und man erhält schließlich:

$$a_{3n} = \frac{-0.05305}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-0.05305}{1.707} = \underline{\underline{-0.03108}}$$

Für ein Θ von 135° findet man diesen Wert für den Anteil der zweiten Harmonischen im Stromflusswinkeldiagramm.

Zusammenfassung

a_{0n}	a_{1n}	a_{2n}	a_{3n}
Gleichanteil	Grundwelle	1.Harmonische	2.Harmonische
0,4425	**0,532**	**0,0439**	**-0,03108**

Die Anfangs dargestellte Stromverlaufsfunktion kann also mit Hilfe der folgenden Ersatzfunktion recht gut nachgebildet werden:

$$y = 0.4425 + 0.532\cos(x) + 0.0439\cos(2x) - 0.03108\cos(3x)$$

Vergleichen Sie doch einmal durch übereinanderliegende Plots die auf Seite 1dargestellte Ausgangsfunktion und die Ersatzfunktion und überprüfen Sie die Qualität der Annäherung durch die nach dem 4.Koeffizienten abgebrochene Fourierreihe.

Aus HF-technischer Sicht bemerkenswert ist, das bei diesem Stromflusswinkel der Grundwellenanteil höher als beim A- und auch beim B-Betrieb ist. Zur Extraktion der maximal machbaren Grundwelle aus einem HF-Leistungstransistor ist der AB-Betrieb daher sehr gut geeignet.