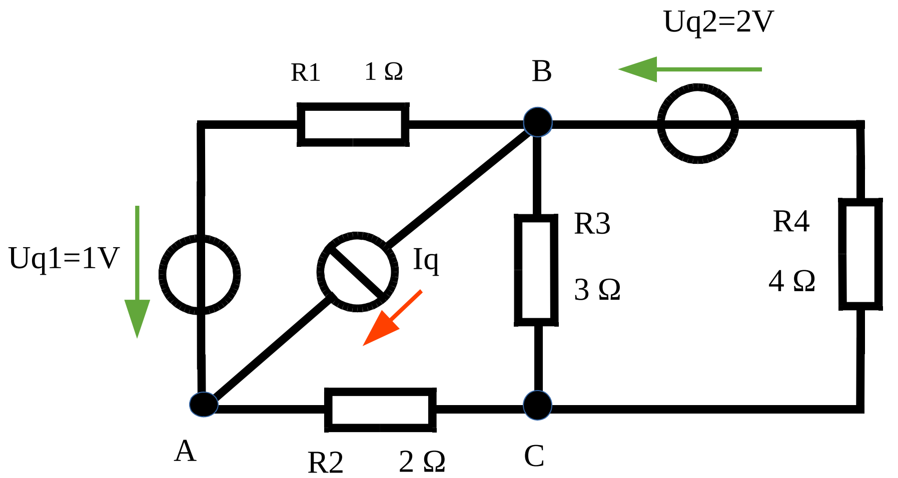
NETZWERKLÖSUNGSVERFAHREN IN DER ELEKTROTECHNIK

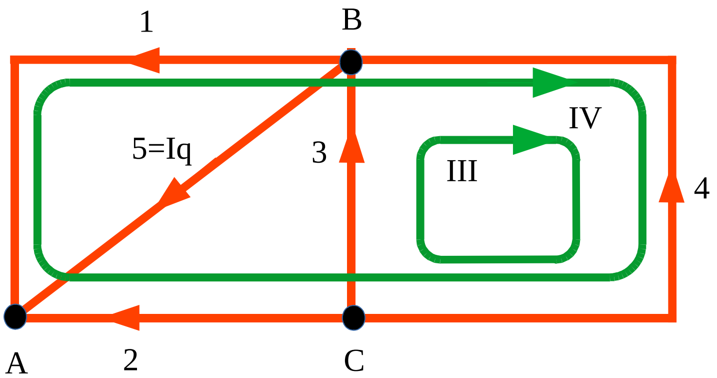
Zweigstromanalyse und Gauß'scher Algorythmus

Gegeben sei ein Netzwerk mit den Werten: Uq1=1V; Uq2=2V; Iq=1A; R1=1Ω; R2= 2Ω; R3=3Ω; R4=4Ω

Gesucht sind alle unbekannten Zweigströme:



Vorgehensweise: Es empfiehlt sich einen Topologieplan aufzustellen. Dieser besteht aus allen Kirchhoffknoten und den sie verbindenden Zweigen, die man vorteilhafterweise durchnummeriert. Die Zweige werden nur als Durchverbindungen dargestellt. Das erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert das Wesentliche zu erfassen. In jedem Zweig legen wir eine Stromrichtung per Pfeil fest. Die Richtung der Festlegung ist vorab frei wählbar. Am späteren Lösungsvorzeichen des jeweiligen Stromes werden wir feststellen, ob wir richtig lagen mit unserer Anfangsvermutung. III und IV werden als Maschenumläufe festgelegt für unsere Maschengleichungen.
Wichtig dabei: Jeder Zweig mit unbekanntem Strom muss mindestens einmal durchlaufen worden sein mit mindestens einer der Maschen.:



Wir erinnern uns: Pro Zweig existiert nur ein Strom. Es gibt 5 Zweige. Der Strom im 5. Zweig ist von außen mit Richtung und Betrag hart aufgezwungen durch die Stromquelle Iq. Es verbleiben damit 4 unbekannte Zweigströme. Diese 4 Unbekannten werden ein Gleichungssystem mit mindestens 4 voneinander linear unabhängigen Gleichungen erfordern, um die 4 unbekannten Ströme zu ermitteln. Zwei von drei Knoten liefern uns zwei unabhängige Knotengleichungen. Wir nehmen dafür die Knoten A und B. Die beiden fehlenden Gleichungen liefern uns die Maschen III und IV für unser Beispiel. Alternative Maschenumläufe wären eine Masche über die Zweige 1, 3 und 2 und dann mit III oder mit IV als zweiter Masche. Zweig 5 soll nicht durchlaufen werden, da der Zweigstrom hier von außen fest aufgezwungen ist.

Aufstellen des Gleichungssystems:

1. Gleichung von Knoten A : $I_1+I_2+I_q=0$ (A) (1.Kirchhoff'scher Satz)
2. Gleichung von Knoten B: $-I_1+I_3+I_4-I_q=0$ (B) (1.Kirchhoff'scher Satz)
3. Gleichung von Masche III: $+U_3-U_4-U_{q2}=0$ (III) (2.Kirchhoff'scher Satz)
4. Gleichung von Masche IV: $-U_{q1}-U_1-U_{q2}-U_4+U_2=0$ (IV) (2.Kirchhoff'scher Satz)

Jetzt werden alle unabhängigen ins System eingespeisten Größen auf die rechte Seite umgestellt:

1. Gleichung von Knoten A : $-I_1-I_2=I_q$ (A)
2. Gleichung von Knoten B: $-I_1+I_3+I_4=+I_q$ (B)
3. Gleichung von Masche III: $+U_3-U_4=U_{q2}$ (III)
4. Gleichung von Masche IV: $-U_1-U_4+U_2=U_{q1}+U_{q2}$ (IV)

In III und IV werden jetzt alle Spannungsabfälle mittels Ohmschen Gesetz als Produkt von Strom und Widerstand ausgedrückt:

1. Gleichung von Knoten A : $-I_1-I_2=I_q$ (A)
2. Gleichung von Knoten B: $-I_1+I_3+I_4=+I_q$ (B)
3. Gleichung von Masche III: $+R_3\cdot I_3-R_4\cdot I_4=U_{q2}$ (III)
4. Gleichung von Masche IV: $-R_1\cdot I_1-R_4\cdot I_4+R_2\cdot I_2=U_{q1}+U_{q2}$ (IV)

Im nächsten Schritt wird das Netzwerk als ein System aufgefasst und es in Form einer Matrizenmultiplikation formuliert. Um das Format zu wahren müssen Nullen ergänzt werden:

Systembeschreibung mittels Matrizen:

Die das Systemverhalten beschreibende Matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 \\ -R_1 & R_2 & 0 & -R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q \\ I_q \\ U_{q2} \\ U_{q1}+U_{q2} \end{bmatrix}$$

Die von außen eingeprägten Größen, der Stimulus zur Erkundung des Systems

Der sich aus dem Systemverhalten ergebende Lösungsvektor, die Antwort des Systems

Das mag auf den ersten Blick etwas umständlich erscheinen, zeigt jedoch einen vielfältig in Naturwissenschaft und Technik verwendbaren Lösungsansatz auf. Zur Probe kann die Matrizenmultiplikation nach Falk'schem Schema erfolgen und wir erhalten dann wieder unsere 4 Gleichungen zurück.

Ansatz: Wenn wir es schaffen die 4 mal 4 Matrix, die das System beschreibt so umzuformen, das sie unterhalb der Hauptdiagonale nur 0en enthält,dann wäre es möglich von der untersten Zeile an beginnend zuerst nach I4 umzustellen,diesen dann auszurechnen, die erlangte Lösung eine Zeile höher zu verwenden um dort I4 zu eliminieren und damit I3 zu errechnen., dann mit I3 und I4 noch eine weitere Zeile höher eingesetzt weiterzurechnen bis auf diese Weise alle 4 Ströme ermittelt wurden. Carl Friedrich Gauss hat im Zusammenhang mit Landvermessungen dieses Verfahren entwickelt und wir wollen es hier anwende**n.**

Die Umformung der Matrix darf nur nach bestimmten Regeln erfolgen, damit sich der innere Wert der Matrix und ihre Kennzahl, die Determinante, dabei nicht ändert. Die angestrebte Form, welche unterhalb der Matrixhauptdiagonale nur Nullen enthält, heißt Zeilen-Stufen-Form kurz ZSF.

Die Regeln zum schrittweisen Umformen sind folgende:

1. Das Vertauschen von Zeilen, manchmal hilfreich um bereits vorhandene Nullen nach unten und links zu bringen.
2. Das Vertauschen von Spalten, ebenfalls hilfreich zum Positionieren der Nullen. Dabei den Lösungsvektor mit tauschen, hier Strom 1 bis 4, da jede Spalte einem Strom zugeordnet ist und das so bleiben muss.
3. Differenzen- oder Summenbildung von zwei Zeilen, wobei die entstehende Zeile eine der beiden Ausgangszeilen in der Matrix ersetzen darf.
4. Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor, so dass eine davon linear abhängige neue Zeile entsteht, welche wiederum die Ausgangszeile ersetzen darf.

Besonders das geschickte Kombinieren der beiden letzten Regeln und das in einer gut gewählten Reihenfolge, hilft zur ZSF zu gelangen.

Umformung zur ZSF Schritt für Schritt:

1.Schritt: Zeile 4 als Zeile 1 nehmen um die zwei Nullen in die untere linke Ecke zu bringen. Dabei den Lösungsvektor nicht mittauschen, aber den Stimulusvektor, also die unabhängigen Größen.
Zum Ende des Zeilentauschens sollte oben links keine Null stehen und unten links möglichst viele:

$$\begin{bmatrix} -R_1 & R_2 & 0 & -R_4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q1}+U_{q2} \\ I_q \\ I_q \\ U_{q2} \end{bmatrix}$$

Für das Rechnen mit dem eigenen Kopf empfiehlt sich eine tabellarische Auflistung mit viel Schreibraum in den einzelnen Fächern der Tabelle.
In der unteren Zusatzzeile werden wir das Ergebnis der kombinierten Zeilen notieren.
n den Zusatzspalten vorn notieren wir den Ursprung der Formel und den geplanten Rechenschritt.
Das orange markierte Feld soll danach eine 0 enthalten.
Die grau markierten Zeilen werden im aktuellen Rechenschritt verwendet.

Erste Elimination: Bringt die erste Null in die zweite Zeile:

Ursprung der Formel	Schritt	I_1	I_2	I_3	I_4	= unabh. Größe
(IV)	E (markiert die zur Elimination verwendete Zeile)	$-R_1$	R_2	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}$
(A)	$(A)\cdot R_1$	-1	-1	0	0	I_q
(B)		-1	0	1	1	I_q
(III)		0	0	R_3	$-R_4$	U_{q2}
$(IV)-(A)R_1$	Diese Zeile ersetzt jetzt die bisherige zweite Zeile (A)	0	R_2+R_1	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1$

Zweite Elimination: Die Dritte Zeile erhält dadurch vorne die führende Null

Ursprung der Formel	Schritt	I_1	I_2	I_3	I_4	= unabh. Größe
(IV)	E	$-R_1$	R_2	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}$
(A)		0	R_2+R_1	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1$
(B)	$(B)\cdot R_1$	-1	0	1	1	I_q
(III)		0	0	R_3	$-R_4$	U_{q2}
$(IV)-(B)R_1$	Diese Zeile ersetzt jetzt die bisherige dritte Zeile (B)	0	R_2	$-R_1$	$-(R_4+R_1)$	$U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1$

Dritte Elimination: Bringt die zweite 0 in der dritten Zeile

Ursprung der Formel	Schritt	I_1	I_2	I_3	I_4	= unabh. Größe
(IV)		$-R_1$	R_2	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}$
(A)	E	0	R_2+R_1	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1$
(B)	$(B)\frac{R_2+R_1}{R_2}$	0	R_2	$-R_1$	$-(R_4+R_1)$	$U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1$
(III)		0	0	R_3	$-R_4$	U_{q2}
$(A)-(B)\frac{R_2+R_1}{R_2}$	Diese Zeile ersetzt jetzt nochmals die dritte Zeile (B)	0	0	$\frac{R_1\cdot(R_2+R_1)}{R_2}$	$\frac{(R_2+R_1)\cdot(R_1+R_4)}{R_2}-R_4$	$(U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1)$ multipliziert mit $(1-\frac{(R_2+R_1)}{R_2})$

Um also einen bestimmten Feldeintrag auf 0 zu bringen muss die betreffende Zeile mit 1 durch diesen Eintrag (hier R2) erweitert werden und dann um den Faktor des darüberliegenden Feldes (hier R2+R1) erweitert werden. Die so entstandene Zeile ist eine linear abhängig hergeleitete und kann dann subtrahiert werden von der mit E markierten Zeile. Das generiert uns dann eine Null im geplanten Feld. Da diese Operationen auch auf die nicht mit 0 befüllten rechten Nachbarfelder angewandt werden muss, werden die hier anfangs unscheinbaren Terme dafür immer aufwändiger. Das ist der Preis für unsere 0.

Vierte Elimination: Eine 0 fehlt noch zur Erlangung der ZSF. Das Feld mit R3 muss noch eliminiert werden:

Ursprung der Formel	Schritt	I_1	I_2	I_3	I_4	= unabh. Größe
(IV)		$-R_1$	R_2	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}$
(A)		0	R_2+R_1	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}-I_q \cdot R_1$
(B)	E	0	0	$\frac{R_1 \cdot (R_2+R_1)}{R_2}$	$\frac{(R_2+R_1) \cdot (R_1+R_4)}{R_2}-R_4$	$(U_{q1}+U_{q2}-I_q \cdot R_1)$ multipliziert mit $(1-\frac{(R_2+R_1)}{R_2})$
(III)		0	0	R_3	$-R_4$	U_{q2}
$(B)-(III)\frac{R_1 \cdot (R_2+R_1)}{R_2 \cdot R_3}$	Diese Zeile ersetzt dann die bisherige 4. Zeile	0	0	0	a	b

mit den beiden Substitutionen :
$$a=\frac{(R_2+R_1) \cdot (R_1+R_4)}{R_2}-R_4+R_4 \cdot R_1 \cdot \left(\frac{R_2+R_1}{R_2 \cdot R_3}\right)$$

und
$$b=(U_{q1}+U_{q2}-I_q \cdot R_1) \cdot \left(1-\frac{(R_2+R_1)}{R_2}\right)-\frac{U_{q2} \cdot R_1 \cdot (R_2+R_1)}{R_2 \cdot R_3}$$

Als Ergebnis erhalten wir die vollendete Zeilen-Stufen-Form für unsere systembeschreibende Matrix:

Ursprung der Formel	I_1	I_2	I_3	I_4	= unabh. Größe
(IV)	$-R_1$	R_2	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}$
(A)	0	R_2+R_1	0	$-R_4$	$U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1$
(B)	0	0	$\frac{R_1\cdot(R_2+R_1)}{R_2}$	$\frac{(R_2+R_1)\cdot(R_1+R_4)}{R_2}-R_4$	$(U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1)$ multipliziert mit $(1-\frac{(R_2+R_1)}{R_2})$
(III)	0	0	0	a	b

mit den beiden Substitutionen : $$a=\frac{(R_2+R_1)\cdot(R_1+R_4)}{R_2}-R_4+R_4\cdot R_1\cdot(\frac{R_2+R_1}{R_2\cdot R_3})$$

und $$b=(U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1)\cdot(1-\frac{(R_2+R_1)}{R_2})-\frac{U_{q2}\cdot R_1\cdot(R_2+R_1)}{R_2\cdot R_3}$$

Nach dem Ausmultiplizieren der 4. Zeile mit Falk‘schem Schema verbleibt jetzt für Gleichung (III) dank der 3 Nullen :

$$I_4=\frac{b}{a}$$

Die Rücksubstitution von a und b ergibt die allgemeine Lösung für I4:

$$I_4=\frac{(U_{q1}+U_{q2}-I_q\cdot R_1)\cdot(1-\frac{(R_2+R_1)}{R_2})-\frac{U_{q2}\cdot R_1\cdot(R_2+R_1)}{R_2\cdot R_3}}{\frac{(R_2+R_1)\cdot(R_1+R_4)}{R_2}-R_4+R_4\cdot R_1\cdot(\frac{R_2+R_1}{R_2\cdot R_3})}$$

Unsere spezielle Lösung ist dann:

(III) $$I_4=\frac{-4}{11}A$$

Das erlangte Ergebnis kann jetzt eine Zeile höher in die Gleichung (B) unserer ZSF zusammen mit den gegebenen Größen eingesetzt werden:

(B) $$\frac{3}{2}\Omega\cdot I_3+\frac{7}{2}\Omega\cdot I_4=-1V$$

Umstellen und Einsetzen von I_4 ergibt: (B) $$I_3=\frac{2}{11}A$$

Noch eine Zeile höher in der ZSF über Gleichung (A) erhalten wir I_2:

(A) $$3\Omega\cdot I_2-4\Omega\cdot I_4=2V$$

Umstellen und Einsetzen von I_4 ergibt: (A) $$I_2=\frac{2}{11}A$$

Oberste Zeile mit Gleichung (IV) führt uns zu I_1:

(IV) $$-1\Omega\cdot I_1+2\Omega\cdot I_2-4\Omega\cdot I_4=3V$$

Umstellen und Einsetzen von I_4 und I_2 ergibt: (IV) $$I_1=\frac{-13}{11}A$$

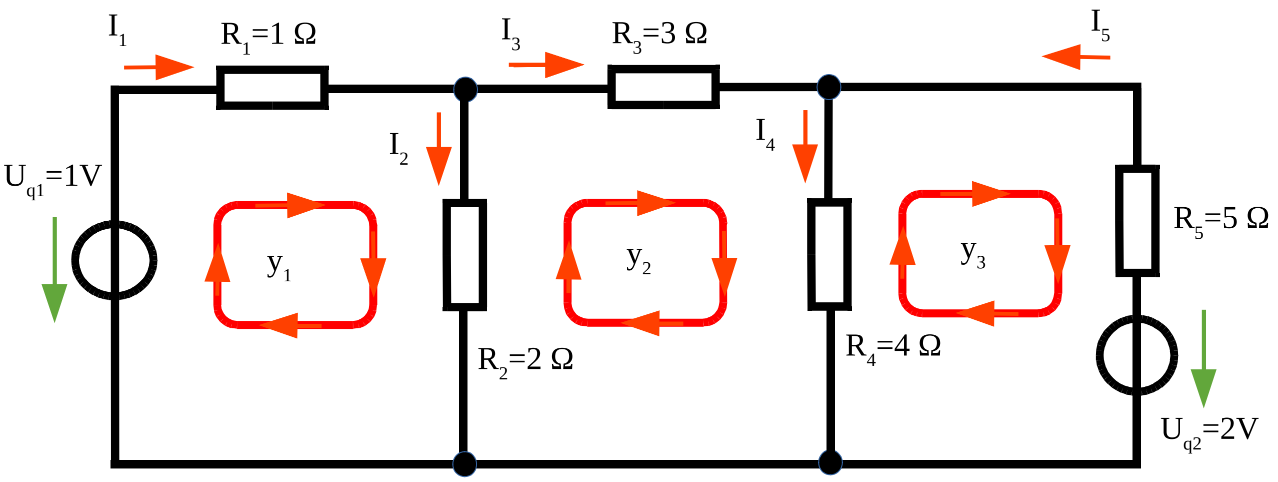
Damit sind alle 4 Elemente des Lösungsvektors bestimmt.

Anmerkung: Das Verfahren des Gauß‘schen Algorythmus, welches hier angewandt wurde ist durch seine immerwiederkehrende gleiche Abfolge der Eliminationsschritte sehr schön zum Programmieren geeignet um wiederkehrende Aufgabenstellungen zu lösen.
Doch gerade um Programme und deren Ergebnisse zu verifizieren muss es manchmal auch im eigenen Kopf nachvollzogen werden können. Deshalb brauchen wir IngenieurInnen, die gut rechnen können.
Das Motto sollte sein: Einen Punkt rechnen wir von Hand, die 1000 anderen macht der „Hochgeschwindigkeitstrottel“….

Maschenstromverfahren und Lösung mit der Determinantenmethode

Gegeben sei folgendes Netzwerk:

Gesucht sind alle 5 Zweigströme.



Vorgehensweise:

> Im Unterschied zur Zweigstromanalyse mittels Knotenpunktgleichungen und Maschengleichungen nach Kirchhoff werden beim Maschenstromverfahren zu Beginn Maschenumläufe mit einem zugehörigen Maschenstrom definiert. Die Zweigströme sind dann das Ergebnis der vorzeichenrichtigen Überlagerung dieser Maschenströme. Damit es nicht zu Verwechslungen kommt werden wir die Maschenströme mit y bezeichnen. Der Zusammenhang zwischen Zweigströmen und Maschenströmen ergibt sich durch vorzeichenrichtige Addition der Maschenströme im jeweiligen Zweig:

$I_1 = +y_1$; $I_2 = +y_1 - y_2$; $I_3 = +y_2$; $I_4 = +y_2 - y_3$ und $I_5 = -y_3$

Aufstellen des Gleichungssystems:

Alle 3 mit Kirchhoffschem Maschensatz aufgestellt:

1. Gleichung von Masche y1 : $-U_{q1} + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 0$ (I)
2. Gleichung von Masche y2: $-I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = 0$ (II)
3. Gleichung von Masche y3: $-I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 + U_{q2} = 0$ (III)

Jetzt werden die Zweigströme mit Maschenströmen ausgedrückt und die unabhängigen Größen auf die rechte Seite gebracht:

1. Gleichung von Masche y1 : $+R_1 \cdot y_1 + R_2 \cdot y_1 - R_2 \cdot y_2 = U_{q1}$ (I)
2. Gleichung von Masche y2: $-y_1 \cdot R_2 + y_2 \cdot R_2 + y_2 \cdot R_3 + y_2 \cdot R_4 - y_3 \cdot R_4 = 0$ (II)
3. Gleichung von Masche y3: $-y_2 \cdot R_4 + y_3 \cdot R_4 + y_3 \cdot R_5 = -U_{q2}$ (III)

Im Zweifel schrittweise Vorgehen und besondere Umsicht walten lassen bei den Vorzeichen!

Jetzt die gleichen Maschenströme in einer Gleichung zusammenfassen und sortieren für die spätere systembeschreibende Matrix

1. Gleichung von Masche y1 : $(R_1+R_2)\cdot y_1-R_2\cdot y_2+0\cdot y_3=U_{q1}$ (I)
2. Gleichung von Masche y2: $-R_2\cdot y_1+(R_2+R_3+R_4)\cdot y_2-R_4\cdot y_3=0$ (II)
3. Gleichung von Masche y3: $0\cdot y_1-R_4\cdot y_2+(R_4+R_5)\cdot y_3=-U_{q2}$ (III)

System in Matrizenform

Gesucht sind jetzt die 3 Maschenströme

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2) & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_2+R_3+R_4) & -R_4 \\ 0 & -R_4 & (R_4+R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ -U_{q2} \end{bmatrix}$$

Die von außen eingeprägten Größen, der Stimulus zur Erkundung des Systems

Die das Systemverhalten beschreibende Matrix

Der sich aus dem Systemverhalten ergebende Lösungsvektor, die Antwort des Systems

Die Lösung des Gleichungssystems wird in diesem Beispiel mit der Determinantenmethode durchgeführt. Dazu werden 4 Determinanten errechnet. Die Maschenströme lassen sich dann mit diesen Determinanten ausdrücken:

$$y_1=\frac{D_{y1}}{D_K} \quad ; \quad y_2=\frac{D_{y2}}{D_K} \quad \text{und} \quad y_3=\frac{D_{y3}}{D_K}$$

mit D_{y1} als Y1-Determinante, D_{y2} als Y2-Determinante, D_{y3} als Y3-Determinante und D_K als Koeffizientendeterminante.

Die zu den Determinanten Y1 bis Y3 gehörigen Matrizen werden nach folgender Regel aufgestellt:
Die zum jeweiligen Maschenstrom gehörige Spalte wird durch die Koeffizientenspalte ersetzt und aus der neu entstandenen Matrix dann die Determinante errechnet.
Für die drei y Matrizen erhalten wir dann:

$$\text{y1-Matrix} = \begin{bmatrix} U_{q1} & -R_2 & 0 \\ 0 & (R_2+R_3+R_4) & -R_4 \\ -U_{q2} & -R_4 & (R_4+R_5) \end{bmatrix}$$

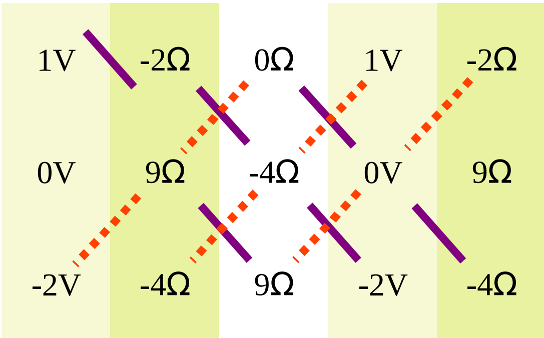
$$\text{y2-Matrix} = \begin{bmatrix} (R_1+R_2) & U_{q1} & 0 \\ -R_2 & 0 & -R_4 \\ 0 & -U_{q2} & (R_4+R_5) \end{bmatrix}$$

$$\text{y3-Matrix} = \begin{bmatrix} (R_1+R_2) & -R_2 & U_{q1} \\ -R_2 & (R_2+R_3+R_4) & 0 \\ 0 & -R_4 & -U_{q2} \end{bmatrix}$$

Bestimmung von Dy1

$$\text{y1-Matrix=}\begin{bmatrix} U_{q1} & -R_2 & 0 \\ 0 & (R_2+R_3+R_4) & -R_4 \\ -U_{q2} & -R_4 & (R_4+R_5) \end{bmatrix}$$

Da es sich um eine 3mal3 Matrix handelt, kann die Determinante mit der Regel von Sarrus berechnet werden. Für das Rechnen mit dem eigenen Kopf ist die Regel gut geeignet, da sie im Unterschied zum Leibniz‘schen Entwicklungssatz in einem Rechendurchgang zum Ziel führt. Sie gilt jedoch leider nur für die 3x3 Form.
Die Matrix wird dazu aufgeschrieben und die ersten beiden Spalten rechts nochmal ergänzt.
Wir setzen dabei gleich die Werte mit Einheiten ein, da eine Einheitenprobe später hier Gold wert ist:



In der Abbildung markieren die violetten Linien von oben links nach unten rechts die sogenannten Hauptdiagonalen der Matrix. Die Nebendiagonalen laufen von oben rechts nach unten links und sind rot gestrichelt markiert.
Als Hauptdiagonale im mathematischen Sinne ist jetzt das Produkt aus den Feldeinträgen entlang einer der Hauptdiagonallinien definiert.
Diese Produkte entlang der Linie, in unserem Beispiel drei, werden dann aufsummiert zur Hauptdiagonalensumme HD. Wir erhalten für unser Beispiel:

$$HD=1V\cdot 9\Omega\cdot 9\Omega+(-2\Omega\cdot-4\Omega\cdot-2V)+0V\cdot\Omega^2$$
$$HD=+81V\cdot\Omega^2-16V\cdot\Omega^2+0V\cdot\Omega^2$$
$$HD=+65V\cdot\Omega^2$$

Beim Rechnen merkt man schnell, dass Nullen willkommen sind, da sie die Rechnung abkürzen.

Die Nebendiagonalensumme wird in gleicher Weise mit Hilfe der Nebendiagonalen errechnet. Hier genügt in unserem Beispiel das Ausmultiplizieren der mittleren Nebendiagonale, da die beiden anderen jeweils eine 0 enthalten:

$$ND=+16V\cdot\Omega^2$$

Die Determinante ergibt sich jetzt aus der Differenz der Hauptdiagonalensumme und Nebendiagonalensumme:

$$D_{y1}=HD-ND=+49V\cdot\Omega^2$$

Bestimmung von Dy2

$$\text{y2-Matrix=}\begin{bmatrix} (R_1+R_2) & U_{q1} & 0 \\ -R_2 & 0 & -R_4 \\ 0 & -U_{q2} & (R_4+R_5) \end{bmatrix}$$

Für die Rechnung wiederum aufnotiert und die erste und zweite Spalte rechts wieder angefügt:

3Ω	1V	0Ω	3Ω	1V
-2Ω	0V	-4Ω	-2Ω	0V
0Ω	-2V	9Ω	0Ω	-2V

Ein kurzer Blick die Hauptdiagonalen entlang und wir sehen in jeder eine 0 und damit ist die Hauptdiagonalensumme:

$$HD=0\,V\cdot\Omega^2$$

Die Nebendiagonalensumme ergibt sich wie folgt:

$$ND=+0\,V\cdot\Omega^2+24\,V\cdot\Omega^2-18\,V\cdot\Omega^2$$
$$ND=+6\,V\cdot\Omega^2$$

Die Determinante: $$D_{y2}=HD-ND=-6\,V\cdot\Omega^2$$

Bestimmung von Dy3

$$\text{y3-Matrix=}\begin{bmatrix} (R_1+R_2) & -R_2 & U_{q1} \\ -R_2 & (R_2+R_3+R_4) & 0 \\ 0 & -R_4 & -U_{q2} \end{bmatrix}$$

Für die Rechnung wiederum aufnotiert und die erste und zweite Spalte rechts wieder angefügt:

3Ω	-2Ω	1V	3Ω	-2Ω
-2Ω	9Ω	0V	-2Ω	9Ω
0Ω	-4Ω	-2V	0Ω	-4Ω

$$HD=-54\,V\cdot\Omega^2+8\,V\cdot\Omega^2$$
$$HD=-46\,V\cdot\Omega^2$$

$$ND=-8\,V\cdot\Omega^2$$

$$D_{y3}=HD-ND=-38\,V\cdot\Omega^2$$

Bestimmung der Koeffizientendeterminante Dk:

Systembeschreibende Matrix = $\begin{bmatrix} (R_1+R_2) & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_2+R_3+R_4) & -R_4 \\ 0 & -R_4 & (R_4+R_5) \end{bmatrix}$

Für die Rechnung wiederum aufnotiert und die erste und zweite Spalte rechts wieder angefügt:

3Ω	-2Ω	0Ω	3Ω	-2Ω
-2Ω	9Ω	-4Ω	-2Ω	9Ω
0Ω	-4Ω	9Ω	0Ω	-4Ω

$$HD=243\,\Omega^3$$

$$ND=48\,\Omega^3+36\,\Omega^3$$
$$ND=84\,\Omega^3$$

$$D_k=HD-ND=159\,\Omega^3$$

Ermittlung der Maschenströme y1, y2, y3:
Gemäß dem Ansatz von Seite 11 gilt

$$y_1=\frac{D_{y1}}{D_K} \quad ; \quad y_1=\frac{+49\,V\cdot\Omega^2}{159\,\Omega^3} \quad ; \quad y_1=0{,}3082\,A$$

$$y_2=\frac{D_{y2}}{D_K} \quad ; \quad y_2=\frac{-6\,V\cdot\Omega^2}{159\,\Omega^3} \quad ; \quad y_2=-0{,}0377\,A$$

$$y_3=\frac{D_{y3}}{D_K} \quad ; \quad y_3=\frac{-38\,V\cdot\Omega^2}{159\,\Omega^3} \quad ; \quad y_3=-0{,}2390\,A$$

Bestimmung der gesuchten Zweigströme I1 bis I5:
Einsetzen in die Beziehungen von Seite 10 ergibt:

$I_1=+y_1$; $I_2=+y_1-y_2$; $I_3=+y_2$; $I_4=+y_2-y_3$ und $I_5=-y_3$

$I_1=+0{,}308\,A$; $I_2=+0{,}346\,A$; $I_3=-0{,}038\,A$; $I_4=+0{,}201\,A$ und $I_5=+0{,}239\,A$

Tip: Machen Sie nach so einem aufwendigen Rechengang zum Abschluss eine Probe der Zweigströme zueinander mit dem 1.Kirchhoffschen Satz um die Lösungen zu verifizieren.