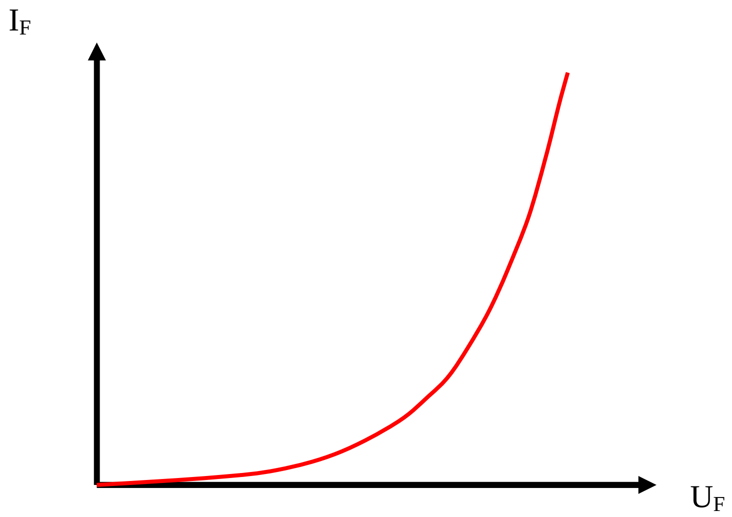
Nichtlineares Verhalten und Intermodulation

Die Entstehung von Intermodulationen

Verstärker, Mischer und andere Komponenten eines nachrichtentechnischen Systems werden häufig aus Halbleitern aufgebaut. Es können durch verschieden dotierte Zonen, welche aneinandergrenzen gesteuerte Stromquellen, Gleichrichter, in der Leitfähigkeit steuerbare Kanäle und ähnliches realisiert werden. Allen Realisierungen gemeinsam ist der nichtlineare Zusammenhang zwischen den einzelnen beteiligten Strömen und Spannungen. Abbildung 1 zeigt als Beispiel den Flussstrom als Funktion der Flussspannung einer normalen Siliziumdiode:



Man stelle sich jetzt die Eingangsdiode eines Bipolartransistors vor. Hier gilt für die Eingangsdiode ebenfalls der oben dargestellte Zusammenhang für $I_B = f(U_{BE})$ (Basisstrom als Funktion der Basis-Emitter-Spannung). Nehmen wir die Stromverstärkung β als annähernd konstant an, dann gilt der selbe qualitative Verlauf für $I_C = \beta * I_B = \beta * f(U_{BE})$. Nur der Maßstab der y-Achse hat sich um β vergrößert und wir haben jetzt einen verstärkten Ausgangsstrom als Funktion der Eingangsspannung. Es ließen sich noch viele derartige Beispiele mit Halbleitern aufzeigen. Allen gemeinsam ist der nichtlineare Zusammenhang zwischen den beiden beteiligten Größen.
Die dargestellte Funktion lässt sich gut in eine Potenzreihe entwickeln und beschreibt so den Zusammenhang zwischen Ausgangsstrom und steuernder Eingangsspannung für das Transistorbeispiel:

$$I_{out} = v_0 \cdot U_{IN}{}^0 + v_1 \cdot U_{IN}{}^1 + v_2 \cdot U_{IN}{}^2 + v_3 \cdot U_{IN}{}^3 + \cdots + v_n \cdot U_{IN}{}^n$$

Gleichanteil

Linearer Anteil

Quadratischer Anteil

Kubischer Anteil

Die ersten 4 Elemente dieser Potenzreihe sind in der HF-Praxis die wichtigsten. Der Gleichanteil wird durch den Arbeitspunkt der Halbleiterschaltung bestimmt. Wird er variiert, dann verschiebt sich die rot dargestellte Funktion entlang der y-Achse. Der lineare Anteil ist die Verstärkung zwischen Eingang und Ausgang des Zweitores, in unserem Beispiel eines spannungsgesteuerten Ausgangsstromes ist das die Steilheit (transconductance). Sie soll im Normalfall so groß wie möglich sein. Der quadratische und der kubische Anteil verursachen die wichtigsten Intermodulationsprodukte und sollen daher im Detail hier untersucht werden.
Um das Intermodulationsverhalten einer Schaltung messtechnisch oder auch in der nichtlinearen Simulation zu erfassen kann im ersten Ansatz ein Doppelton, d. h. zwei Frequenzen die eng benachbart liegen als Eingangssignal verwendet werden. Die Amplituden werden auf gleichen Betrag eingestellt. Technisch realisieren lässt sich das zum Beispiel über die Zusammenschaltung zweier HF Generatoren mittels Wilkinson Combiner o.ä..

Intermodulation 2. Ordnung

Betrachtet wird zuerst die Entstehung der Intermodulationsprodukte 2. Ordnung durch das grün markierte quadratische Element der Potenzreihe. Für das Eingangssignal setzen wir den Doppelton an:

$$U_{IN} = A\cdot\cos(\omega_1 t) + A\cdot\cos(\varpi_2\cdot t) \qquad \text{wird eingesetzt in} \qquad I_{OUT\,2} = v_2 \cdot U_{IN}{}^2$$

Das ergibt:

$$I_{OUT\,2} = v_2 \cdot A^2 \cdot (\cos(\omega_1\cdot t) + \cos(\omega_2\cdot t))^2 = v_2 \cdot A^2 \cdot \left[\cos^2(\omega_1\cdot t) + 2\cdot\cos(\omega_1\cdot t)\cdot\cos(\omega_2\cdot t) + \cos^2(\omega_2\cdot t)\right]$$

Es werden jetzt zwei Additionstheoreme benötigt:

$$\cos^2(\omega\cdot t) = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos(2\omega t)) \quad \text{und} \quad \cos(\omega_1 t)\cdot\cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\left[\cos(\omega_1 t - \omega_2 t) + \cos(\omega_1 t + \omega_2 t)\right]$$

Die Anwendung der beiden Theoreme führt zu:

$$I_{OUT\,2} = v_2 \cdot A^2 \cdot \left[\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega_1 t)) + 2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(\omega_1 t - \omega_2 t) + \cos(\omega_1 t + \omega_2 t)\right] + \frac{1}{2}(1+\cos(2\omega_2 t))\right]$$

Klammern auflösen, umstellen und zusammenfassen führt zu:

$$I_{OUT\,2} = v_2 \cdot A^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_2 t) + \cos(\omega_1 t - \omega_2 t) + \cos(\omega_1 t + \omega_2 t)\right]$$

f= 0 $\quad$ $2f_1$ $\quad$ $2f_2$ $\quad$ f_1-f_2 $\quad$ f_1+f_2

Diese beiden Terme werden häufig für Mischvorgänge verwendet

Im Ergebnis ist zu sehen, dass das Ausgangssignal nur durch das quadratische Element der Potenzreihe verursacht 4 neue Frequenzen enthält und auch noch einen neuen Gleichanteil. Vor der Klammer stehen die Koeffizienten v_2 und A^2. Das erleichtert die Wiedererkennung der Produkte in der Messtechnischen Untersuchung. Verdoppelt man die Amplitude der beiden Eingangstöne, dann entspricht das einer Verdoppelung von A. Das sind 6dB Erhöhung der Spannung. Die durch die Intermodulation gebildeten oben dargestellten Produkte wachsen dann jedoch mit A^2 und ihre Amplitude hat sich daher vervierfacht. Das entspricht dann einer Erhöhung um 12dB. Daher gilt 1dB Änderung auf beiden Doppeltönen bewirkt dann 2dB Änderung auf den grün hervorgehobenen Frequenzen. Kann man diesen Zusammenhang nicht beobachten, dann handelt es sich bei der beobachteten Frequenz <u>nicht</u> um ein Intermodulationsprodukt 2.Ordnung. Beim Aufbau von Mischern ist ein großes v_2 erwünscht, da man die Frequenzdifferenz oder die Summe der beiden Eingangsfrequenzen erhalten möchte. Man möchte dann eine möglichst rein quadratisch verlaufende Kennlinie verwenden.

Intermodulation 3.Ordnung

Betrachtet wird jetzt das rot markierte kubische vierte Element der Reihe:

$U_{IN} = A \cdot \cos(\omega_1 t) + A \cdot \cos(\varpi_2 \cdot t)$ wird jetzt eingesetzt in $I_{OUT3} = v_3 \cdot U_{IN}{}^3$ und der mathematische Aufwand für die Umformung steigt noch etwas:

$I_{OUT3} = v_3 \cdot A^3 \cdot (\cos(\omega_1 \cdot t) + \cos(\omega_2 \cdot t))^3$ Der letzte Faktor ist eine binomische Formel. Nach dem Ausmultiplizieren erhält man:

$$I_{OUT3} = v_3 \cdot A^3 \cdot \left[\cos^3(\omega_1 \cdot t) + 2 \cdot \cos^2(\omega_1 \cdot t) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) + \cos^2(\omega_2 \cdot t) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + \cos^3(\omega_2 \cdot t) + 2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot \cos^2(\omega_2 \cdot t) + \cos^2(\omega_1 \cdot t) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)\right]$$

Jetzt wird auf 3 Additionstheoreme zurückgegriffen:

$\boxed{\cos^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\omega t))}$ und $\boxed{\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}[\cos(\omega_1 t - \omega_2 t) + \cos(\omega_1 t + \omega_2 t)]}$ wie beim IM2 und zusätzlich $\boxed{\cos^3(\omega \cdot t) = \frac{1}{4} \cdot (3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t))}$

Deren Anwendung liefert:

$$I_{OUT3} =$$

$$v_3 A^3 \left[\frac{1}{4}(3\cos(\omega_1 t) + \cos(3\omega_1 t)) + (1 + \cos(2\omega_1 t))\cos(\omega_2 t) + \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega_2 t)) \cdot \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{4}(3\cos(\omega_2 t) + \cos(3\omega_2 t)) + (1 + \cos(2\omega_2 t)) \cdot \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega_1 t)) \cdot \cos(\omega_2 t)\right]$$

Jetzt werden die Klammern aufgelöst:

$$I_{OUT3} = v_3 A^3 \bullet$$

$$\left[\frac{3\cos(\omega_1 t)}{4} + \frac{\cos(3\omega_1 t)}{4} + \cos(\omega_2 t) + \cos(2\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) + \frac{\cos(\omega_1 t)\cos(2\omega_2 t)}{2} + \frac{\cos(\omega_1 t)}{2} + \frac{3\cos(\omega_2 t)}{4} + \frac{\cos(3\omega_2 t)}{4} + \cos(\omega_1 t) + \cos(2\omega_2 t)\cos(\omega_1 t) + \frac{\cos(\omega_2 t)}{2} + \frac{\cos(2\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)}{2}\right]$$

Umstellen und zusammenfassen liefert:

$$I_{OUT3} = v_3 \cdot A^3 \cdot \left[\underset{\substack{\Uparrow \\ f_1}}{\frac{9}{4}\cos(\omega_1 t)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ f_2}}{\frac{9}{4} \cdot \cos(\omega_2 t)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ 3f_1}}{\frac{1}{4}\cos(3\omega_1 t)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ 3f_2}}{\frac{1}{4}\cos(3\omega_2 t)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ 2f_1-f_2}}{\frac{3}{4}\cos(2\omega_1 t - \omega_2 t)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ 2f_1+f_2}}{\frac{3}{4}\cos(2\omega_1 t + \omega_2 t)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ 2f_2-f_1}}{\frac{3}{4}\cos(\omega_1 t - 2\omega_2 t)} + \underset{\substack{\Uparrow \\ 2f_2+f_1}}{\frac{3}{4}\cos(\omega_1 t + 2\omega_2 t)}\right]$$

Anmerkung: Es gilt
cos x = cos(-x) da der cos eine gerade Funktion ist. Daher kann –1 in der Klammer multipliziert werden

Das kubische Element der Reihe generiert aus den beiden Frequenzen f_1 und f_2 am Eingang die rot hervorgehobenen neuen Frequenzen. Die Amplitude dieser IM3 Produkte variiert mit A^3. D.h. ändert man das Eingangssignal um 1dB, dann ändern sich die daraus generierten IM3 Produkte um 3dB. Daran sind sie in der messtechnischen Praxis wiederzuerkennen